جامعة البعث - كلية العلوم - قسم الرياضيات امتحان مقرر ميكانيك 2 (ثالثة رياضيات). الدورة الإضافية 2016 الاسم:

السؤال الأول : (40): اختر العبارة الصحيحة تماماً:

1. المجموعة المتماسكة هي مجموعة مادية تكون المسافة بين أي نقطتين من نقاطها:

A. متغيرة مع الزمن. B. تابعة للسرعة. C. ثابتة. D. كل ماسبق صحيح. E. كل ماسبق خطأ.

2. الجسم الصلب هو المجموعة المادية التي تحقق نقاطها:

A. المسافات بينها ثابتة. B. تشكل وسطاً متصلاً. C. قابلة للعد. D. كلاً من A و B معاً. E. كل ماسبق خطأ.

3. يكفي لتعيين وضع الجسم الصلب تماماً معرفة وضع نقاط منه عددها:

A. تسع. B. أربع. C. كل من A و B صحيحة. D. كل ما سبق خطأ. E. ثلاث ليست على استقامة واحد

4. يتعين وضع الجسم الصلب الطليق في U^3 ، بشكل عام ، بمعرفة وسطاء مستقلة عددها:

A. ستة. B. تسعة. C. ثلاثة. D. كل ما سبق خطأ. E. كل ماسبق صح.

5. يتعين وضع الجسم الصلب الطليق في U^3 ، بشكل عام ، بمعرفة وسطاء مستقلة هي:

A. احداثيات نقطة معينة منه (ثلاثة). B. زوايا أولر (ثلاث). C. زاويتان لأولر. D. ما ورد في A و B معاً. E. كل ماسبق خ

6. يتعين وضع القضيب الطليق في U^3 ، بشكل عام ، بمعرفة وسطاء مستقلة هي:

A. ستة. B. وسيطين. C. احداثيات نقطة منه. D. زاوية الترنح وزاوية التأرجح. E. ما ورد في C و D مع

7. إذا كان القضيب OA متجانساً وطوله L وكتلته M ومنطبقاً على المحور OX ، فإن عزم عطالته بالنسبة لهذا المحور يساو

A. صفر. B. $\frac{ML^2}{12}$. C. $\frac{ML^2}{3}$. D. $\frac{ML^2}{2}$. E. كل ماسبق خطأ.

8. إن عزم عطالة القضيب الذي طوله L وكتلته M بالنسبة لأي محور يعامده في أحد طرفيه يساوي:

A. $\frac{ML^2}{12}$. B. $\frac{ML^2}{3}$. C. $\frac{ML^2}{6}$. D. $\frac{ML^2}{4}$. E. كل ماسبق خطأ.

السؤال الثاني : (30): حل المسألة التالية: صفيحة ناقصية متجانسة كتلتها M : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\le 1$ ، حيث $Z=0$ ، المطلوب

1) ارسم الشكل المناسب وأوجد كلاً من P_{XY} و P_{YZ} و P_{ZX} بأقصر طريقة.
2) أوجد كلاً من I_X و I_Y وبعدها أوجد I_Z بأقصر طريقة.

السؤال الثالث : (30): أجب فقط عن أحد السؤالين التاليين:

أولاً) يوجد سلك دائري ساكن: $X^2+(Y-r)^2=r^2$ ويوجد قضيب AB طوله L ويتحرك بحيث ينزلق طرفه A على المحـ

OX ويبقى القضيب مماساً للسلك أثناء الحركة ، المطلوب: 1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين وضع القضيب مع الر

2) أوجد إحداثيات المركز الآني لدوران القضيب في كلٍ من الجملة المتماسكة معه والجملة الثابتة.
3) أوجد منحني المتدحرج ومنحني القاعدة.

ثانياً) يتحرك مخروط حول رأسه الثابت O بحيث يبقى أحد أقطار قاعدته موازياً للمستوي الثابت OXY ، المطلوب:1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين وضع المخروط مع الرسم المناسب. 2) أوجد سطح مخروط القاعدة وسطح مخروط المتدحرج.

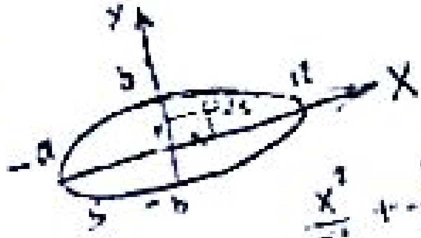
تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ________ مدرس المقرر: د.كامل محمد

سلم تصحيح امتحان الدورة الامتحانية ... ٢٠١١م
مقرر الميكانيك ٢ ...

السؤال الأول: $8 \times 3 = 24$

$(C-1)$ ، $(D-2)$ ، $(E-3)$ ، $(A-4)$ ، $(D-5)$ ، $(E-6)$ ، $(A-7)$ و $(B-8)$.

السؤال الثاني ط١:



مدخل في الحل، الرسم:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ، $ds = dx \cdot dy$

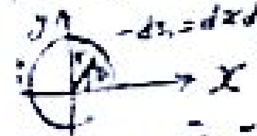
إجراء التحويل:

(3)

$\frac{X}{a} = x$ ، $\frac{Y}{b} = y \Rightarrow dX = a\,dx$ ، $dY = b\,dy$ وبالتالي

$X = ax$ ، $Y = by$ | $x^2 + y^2 \leq 1$ ، $dS = dX\,dY = a \cdot b\,dx\,dy$

إجراء التحويل (العلاقات بين الإحداثيات الديكارتية والقطبية):



$ds = dx\,dy$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$ds = a\,b\,dx\,dy$ ، $dx \cdot dy = |J|\,dr\,d\theta$ ، $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$

(3) $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$; $0 \leq r \leq 1$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ومنه

$\boxed{dS = a \cdot b\, r\, dr\, d\theta}$

ط٢: إن oxz مستوي تناظر للصفيحة حيث لكل نقطة (X,Y) نظيرة $(-X,Y)$ بالنسبة له:

(9) $P_{XY} = \int_S XY\,dm = \int_{S/2} XY\,dm + \int_{S/2} (-X)Y\,dm = \int_{S/2} XY\,dm - \int_{S/2} XY\,dm = 0$

$P_{XZ} = \int_S XZ\,dm = 0$ و $P_{YZ} = \int_S YZ\,dm = 0$ (بالإنشاء $Z = 0$)

ط٣:

$I_X = \rho \int_S Y^2\,dS = \rho a b^3 \int_S y^2\,dx\,dy = \rho a b^3 \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta$

(4) $= \rho a b^3 \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{(\rho a b \pi)}{4} b^2 = \frac{M}{4} b^2$

$I_Y = \rho \int_S X^2\,dS = \rho a^3 b \int_S x^2\,dx\,dy = \rho a^3 b \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta$

(4) $= \frac{\rho a^3 b}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\rho a^3 b}{4} \left[\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{\rho a b \pi}{4}\right) a^2$

$I_Y = \frac{M}{4} a^2$ و $\boxed{I_Z = I_X + I_Y = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)}$

(2)

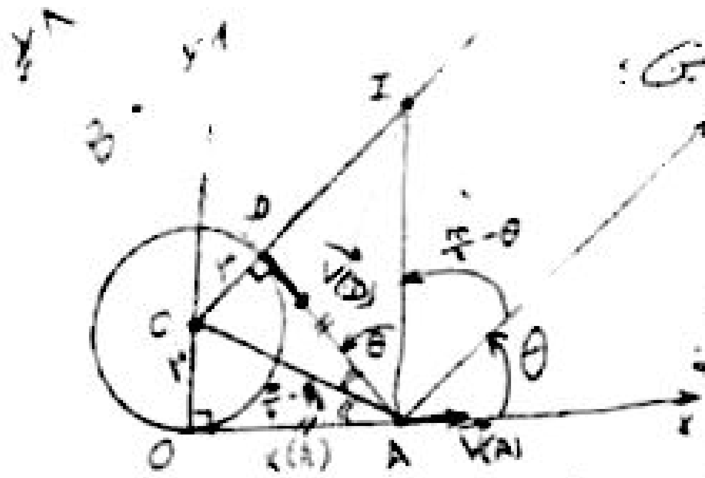
ت.ع.

III

السؤال الثالث: اختر مسألة من اثنتين:

الأولى:

ط١: الرسم والوسطاء المستقلة



يتحرك القضيب حركة مستوية مبينين موضعه بمعرفة احداثيات نقطة منه ولتكن $A(x,y)$ وزاوية دورانه حولها ولنرمز لها ب θ هذا بشكل عام ولكن بسبب القيد: انزلاق A على ox فإن $y_A=0$ وبالتالي بقي وسيطان θ, x وأيضاً بسبب القيد من جانب أن القضيب يبقى مماساً للسلك نجد أن θ, x مرتبطان مع بعضهما بالعلاقة:

12 $x_A = r\cot g(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$

وأحدهما مستقلاً فقط ولنختره θ (الوسيط المستقل الوحيد الكافي لتعيين وضع القضيب في الحركة).

ط٢: إيجاد I إنشائياً بإقامة عمود على $\vec{V}(D)$ وعمود على $\vec{V}(A)$ يتقاطعان في I. أما إيجاد احداثيات I (المركز الآني للدوران) فطريقة هندسية أو طريقة تحليلية (يترك على الطالب اجراء العمليات) احداثيات I في R_1:

$$X_1(I)=\frac{r\sin\theta}{1-\sin\theta}\ ,\ Y_1(I)=\frac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=r\cot g(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$$

احداثيات I في R: 10

$$X(I)=r\cot g(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$$

$$Y(I)=\frac{r}{2}\left[1+\cot g^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\right]=\frac{r}{1-\sin\theta}$$

ط٣: إيجاد المنحني الأساسي: يتم حذف الوسيط θ بين احداثيات I في R_1 (على الطالب إجراء عمليات الحذف) حيث نحصل على المعادلة:

$$Y_1^2(I)=2r\left[X_1(I)+\frac{r}{2}\right]$$ 4

وهي معادلة قطع مكافئ محوره المحرك AX_1 وذروته $(-\frac{r}{2},0)$ ووسيطه r ومعادلة دليله $\boxed{X_1=-r}$ ومحرقه $A(0,0)$.

إيجاد منحني القاعدة: يتم حذف θ بين احداثيات I في R (على الطالب إجراء العمليات المعروفة) نحصل على المعادلة:

$$X^2(I)=2r(Y-\frac{r}{2})$$ 4

وهي معادلة قطع مكافئ محوره ناظم (الثابت) OY وذروته $(0,\frac{r}{2})$ ووسيطه r ومحرقه $(0,r)$ ودليله $Y=0$ أي ox.

السؤال الثالث (اختر واحدة من اثنتين)

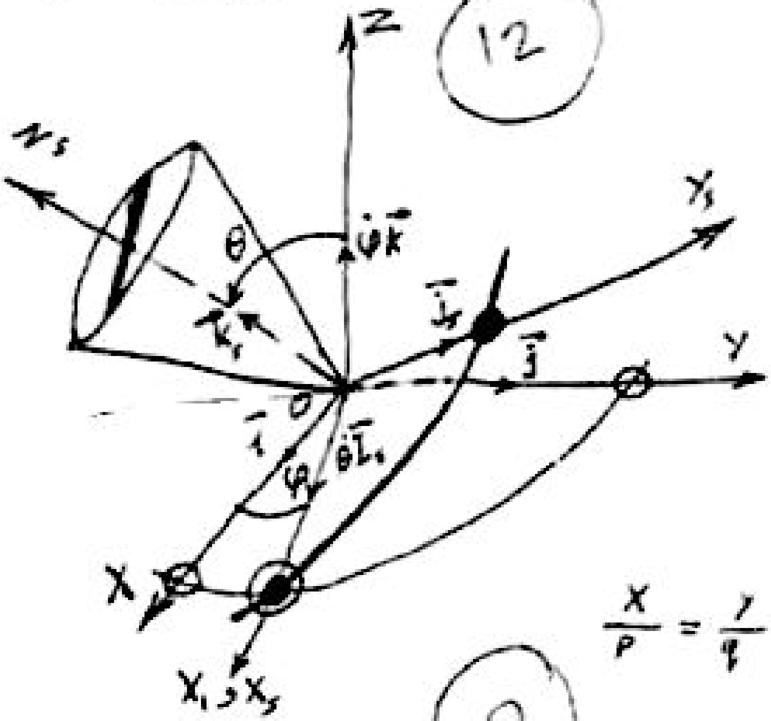
ثانياً:

ط 1: المخروط يتحرك كجسم صلب حول نقطة منه (ذروته) وبالتالي فالحركة دورانية حول نقطة للجسم ويتعين وضعه بزوايا أولر:

$\psi = (\widehat{OX, OX_1})$ دوران ذاتي و $\varphi = (\widehat{OX, OX_1})$ ترنح و $\theta = (\widehat{OZ, OZ_1})$ تأرجح

ولكن بما أن أقطار القاعدة يبقى موازٍ بالـ OXY فإنه سيوازي خط الأفق OX_1 وبالتالي فإن خط الأفق يصبح متماسكاً مع محيط المخروط لكونه موازٍ لقطر قاعدة المخروط (متماسك معه) وهكذا OX_1 محور خط أفق ومحور متماسك OX_2 إذا $\psi = 0$ لانطباق ضلعيها على بعضهما البعض. وهكذا يكون قد بقي متغيران مستقلان يعينان وضع المخروط هما φ الترنح و θ التأرجح ونوضح ذلك بالرسم:

12



ط 2:

سطح القاعدة:

معادلات المحور الآني للدوران في R^3:

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r} \Rightarrow$$

حيث:

9

$p = \dot\theta\cos\varphi$ و $q = \dot\theta\sin\varphi$ و $r = \dot\varphi$ $\Longrightarrow$

$$\frac{X}{\dot\theta\cos\varphi} = \frac{Y}{\dot\theta\sin\varphi} = \frac{Z}{\dot\varphi}$$

بحذف الوسيط φ من معادلات المحور الآني للدوران نحصل على المعادلة لسطح القاعدة

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{\dot\theta}{\dot\varphi}\right) Z^2$$

وهي معادلة سطح مخروطي محوره تناظره OZ ورأسه O

سطح المتحرك: معادلات المحور الآني للدوران في R_2^3: (9)

$$\frac{X_2}{p_2} = \frac{Y_2}{q_2} = \frac{Z_2}{r_2}$$

$p_2 = \dot\theta$ و $q_2 = \dot\varphi\sin\theta$ و $r_2 = \dot\varphi\cos\theta$

$$\frac{X_2}{\dot\theta} = \frac{Y_2}{\dot\varphi\sin\theta} = \frac{Z_2}{\dot\varphi\cos\theta} \Rightarrow Y_2^2 + Z_2^2 = \left(\frac{\dot\varphi}{\dot\theta}\right)^2 X_2^2$$

بحذف الوسيط θ نجد سطح المتحرك هو سطح مخروطي محور تناظره OX_1 ورأسه O. وهو ...

$$= r^2 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = r^2 \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\dot{I}^2 = r^2 \frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2} = r^2 \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \Bigg\} \Rightarrow Y_I = r\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = r\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\theta}' \wedge \vec{V}(A)}{\theta'^2} \quad ; \vec{V}(A) = \frac{dX(A)}{dt} = r\frac{d}{dt}\cot g\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\vec{i}$$

$$= r\frac{\varphi'}{2}\frac{\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{r\varphi'}{2}\left[1 + \cot g^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]\vec{i}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{r}{2} K \wedge \vec{i}\left[1 + \cot g^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{r}{2}\left[1 + \cot g^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]\vec{j}$$

$$= Y(I)\vec{j} = \cancel{r\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}}$$

$$\vec{AI} = \frac{r}{2}\left[1 + \cot g^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta/2\right)\right]\left(\sin\theta\,\vec{I}_s + \cos\theta\,\vec{I}_t\right)$$

$$X(I) = \frac{r}{2}\left[1 + \cot g^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]\sin\theta$$

$$= \frac{r}{2}\left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}\right]\sin\theta$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= r\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$Y_I = \frac{r}{2}\left[1 + \cot g^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]\cos\theta = \frac{r}{2}\left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}\right]\cos\theta$$

$$= r\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$